Polos Olímpicos de Treinamento

Curso de Combinatória - Nível 1

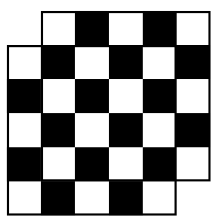
Prof. Bruno Holanda

Aula 9

Tabuleiros

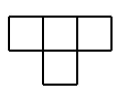
Quem nunca brincou de quebra-cabeça? Temos várias "pecinhas" e temos que encontrar uma maneira de unir todas elas para formar uma figura maior. O que costumava ser apenas um passa-tempo, ganhou uma irmã que estudada por muitos matemáticos sérios pelo mundo a *"Tiling Theory"* (traduzindo: Teoria da Cobertura). E por se tratar de um tema muito atrativo, logo ganhou força nas principais competições de matemática.

Problema 1. Determine se é possível cobrir ou não o tabuleiro abaixo (sem sobreposições) usando apenas dominós?



Solução. Pinte as casas do tabuleiro acima alternadamente de branco e preto (como no tabuleiro de xadrez). Note que, não importa como colocamos o dominó no tabuleiro, ele sempre cobre uma casa branca e ou outra preta. Desse modo se fosse possível cobrir o tabuleiro usando apenas dominós, deveríamos ter o tabuleiro com a quantidade de casas pretas igual a quantidade de casas brancas. Mas no tabuleiro "quebrado" existem 18 casas brancas e 16 pretas. Logo, não é possível fazer tal cobertura. $\square$

Problema 2. Podemos cobrir um tabuleiro 10×10 usando apenas T-tetraminós como abaixo?



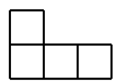
Solução. Pinte o tabuleiro de branco e preto da maneira usual (como no xadrez). Note que ao colocarmos um T-tetraminó no tabuleiro ele pode assumir colorações do tipo 1 ou 2.

Suponha que ao cobrir o tabuleiro usamos A peças do tipo 1 e B do tipo 2. Sabemos que devemos usar 25 peças no total ou seja $A + B = 25$. Cada peça do tipo 1 possui uma casa branca e cada peça do tipo 2 possui 3 casas brancas, e como temos ao todo 50 casas brancas no tabuleiro; $A + 3B = 50$. De modo análogo, obtemos $B + 3A = 50$. Porém o sistema acima não possui solução inteira. Logo, não é possível cobrir o tabuleiro. $\square$

Tipo 1 Tipo 2

E não é apenas a pintura do xadrez que é útil para resolver problemas. Vejamos o próximo exemplo.

Problema 3. Para que valores de n, m podemos cobrir um tabuleiro $n \times m$ usando apenas L-tetraminós como abaixo?



Solução. Claramente $n \cdot m$ deve ser múltiplo de 4. Nesse caso, n ou m (possivelmente ambos) deve ser múltiplo de dois. Suponha sem perca de generalidade que m (i.e., o número de colunas) é par. Pinte altenadamente as colunas de duas cores como mostrado na figura a seguir. Para finalizar, adapte a solução do problema anterior. $\square$

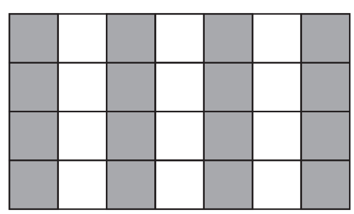


Figura 1: Pintura por Colunas

Se duas cores ajudam muita gente, quatro cores ajudam muito mais! É isso mesmo! Não vá pensando que é só pintar o tabuleiro de preto e branco que você vai resolver todos os problemas de tabuleiro do mundo! O próximo exemplo mostra que às vezes apenas duas cores não bastam.

Problema 4. É possível que um cavalo do xadrez passe por todas as casas de um tabuleiro 4×10 exatamente uma vez e, em seguida retorne para o quadrado original?

	1	2	1	2	1	2	
	3	4	3	4	3	4	
	4	3	4	3	4	3	
	2	1	2	1	2	1	

Solução. Pinte o tabuleiro $4 \times n$ como mostra a figura anterior. Assuma que seja possível fazer que o cavalo passe por todas as casas. Note que, se o cavalo está na casa 1 só poderá ir para casa 3 desse modo para o cavalo ir para uma casa de cor 1 ele passa por duas casas de cor 3, e como cada cor possui o mesmo número de casas, fica impossível o cavalo fazer o passeio. $\square$

Vimos que pintar tabuleiros usando cores é uma exelente idéia. Uma idéia melhor ainda é pintar usando números! Você deve estar se perguntando por que? Bem, os números possui propriedades aritméticas (i.e, podem ser somados e multiplicados), coisa que não podemos fazer com cores. A não ser que você ache que preto+branco=cinza.

Problema 5. (Estônia 1993) Para quais naturais n é posível cobrir um retângulo de tamanho $3 \times n$ com peças mostradas na figura abaixo sem sobreposição?

Solução. Pinte o tabuleiro da seguinte forma:

1	1	1	1	1	1	1	
−1	−1	−1	−1	−1	−1	−1	
1	1	1	1	1	1	1	1

Veja que a soma dos números cobertos por um *L-trinimó* é sempre 1 ou -1. Enquanto a soma dos números cobertos por um *Z-tetraminó* é sempre zero. Além disso, a soma de todos os números do tabuleiro é n. Observe que para cobrir um tabuleiro $3 \times n$ podemos usar no máximo n peças. Assim, todas as peças devem ser L-triminós. Além disso, não podemos dispor nenhum L-triminó de modo que a soma dos números escritos em suas casas seja -1. Dessa forma, se pintarmos o tabuleiro como no xadrez, cada L-triminó terá que ocupar duas casas pretas. Portanto, n deve ser um número par. $\square$

Bibliografia Recomendada

Muitos dos exercícios propostos nesta aula foram retirados da página da Olimpiada Brasileira de Matemática (`www.obm.org.br`). Outros livros que também podem servir como apoio são:

1. **Mathematical Circles: Russian Experience (Mathematical World, Vol. 7)**. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia V. Itenberg.

2. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987-1991 (Contests in Mathematics Series ; Vol. 1)**. Dmitry Fomin, Alexey Kirichenko.

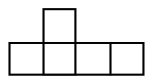
Problemas Propostos

Problema 6. Sobre uma das casas de um tabuleiro infinito, existe um cubo que cobre a casa perfeitamente. A face no topo do cubo é branca, enquanto as demais faces são pretas. A cada passo, podemos tombar o cubo para um dos lados. É possível que:

(a) Após 2004 passos o cubo volte ao mesmo quadrado com a face branca para baixo?

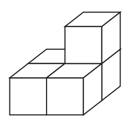
(b) Após 2005 passos?

Problema 7. É possível cobrir um tabuleiro 5×10 usando apenas peças como abaixo?



Problema 8. Um tabuleiro $n \times m$ foi totalmente coberto usando peças 4×1 e 2×2. Em seguida, todas as peças foram retiradas do tabuleiro e uma peça 2×2 foi substituída por uma peça 4×1. Prove que o tabuleiro não poderá ser mais coberto com essa troca.

Problema 9. (Estônia 2004) Ache a medida do lado do menor cubo que pode ser coberto por *crymbles* (figura 9).



Problema 10. (Rússia 1996) Podemos cobrir um tabuleiro 5×7 com *L-triminós* que tal forma que cada casa do tabuleiro seja coberta por um mesmo número de peças?

Problema 11. Determine se a última peça do resta um pode terminar na casa indicada (figura 2)

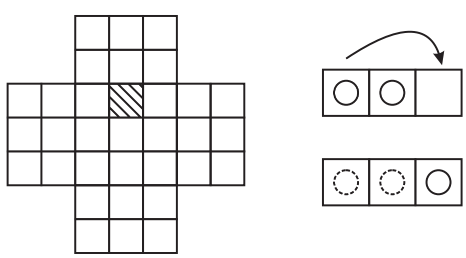


Figura 2: Resta Um.

Dicas e Soluções

6. (a) Sim. Vire o cubo duas vezes para a direita, uma para baixo, duas para a esquerda e uma para cima (figura 3). Após estes seis passos, a face branca estará virada para baixo. Depois basta repetidamente o cudo para direira e para esquerda 996 vezes.

   (b) Não. Pinte o tabuleiro na maneira usual. Note que, a cada movimento, o cubo muda de uma casa preta para uma casa branca e vice-versa. Logo, após um número ímpar de movimentos não poderá estar na casa inicial.

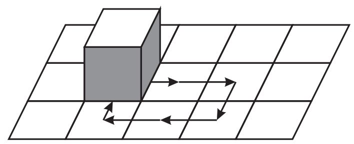


Figura 3: Virando um Cubo.

7. Sim veja a figura 4.

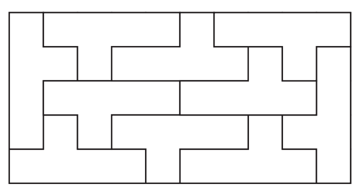


Figura 4: Cobrindo com Y-pentaminós.

   Nota. Com um pouco mais de trabalho podemos provar que o "menor" tabuleiro (em número de casas) que podemos cobrir usando apenas Y-pentaminós é o 5×10. Note que para cobrí-lo usamos 10 peças. Dessa forma, dizemos que o Y-pentaminó tem ordem 10. Veja que alguns polinimós já são um tabuleiro, como acontece com o monominó e o dominó. Esse tipo de peça tem ordem 1 ou trivial. Algumas peças (como o Z-tetraminó) possuem ordem infinita, já que não existe nenhum tabuleiro $n \times m$ que possa ser inteiramente coberto usando somente elas.

8. Pinte tabuleiro da seguinte forma:
   1) As linhas pares devem ser pintadas como no xadrez, alternando preto e branco.
   2) As linhas ímpares devem ser pintadas totalmente de branco.

9. **Dica:** Use a pintura como mostra a figura 5 para mostrar que o cubo de lado 5 não pode ser coberto.

10. Pinte o tabuleiro usando -2's e 1's como mostrado na figura a seguir. Cada T-triminó ocupa três casas cuja a soma é 3 ou 0. Por outro lado a soma de todas casas do tabuleiro é -1. Logo, é impossível cobrir já que a soma não é um múltiplo positivo de 3.

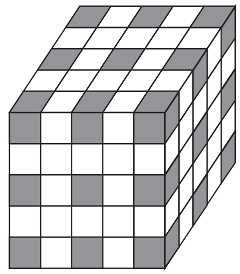


Figura 5:

−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2
1	1	1	1	1	1	1
−2	1	−2	1	−2	1	−2

Figura 6:

11. Use a pintura alternada do xadrez usando três cores.